Lec 12 数列极限的性质与应用

12.1 复习数列极限的线性性质

定理 12.1 (数列极限的线性性质)

设 a, b, c_1, c_2 为常数且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 则

$$\lim_{n\to\infty}(c_1a_n + c_2b_n) = c_1a + c_2b = c_1\lim_{n\to\infty} a_n + c_2\lim_{n\to\infty} b_n.$$

从上述极限的线性性质, 不难得到以下结论:

1. 当 $c_1 = c_2 = 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
2. 当 $c_1 = 1, c_2 = -1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
3. 当 $c_1 = k, c_2 = 0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = k\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
4. 数列的线性性质可推广到任意有限个收敛数列的情形: 设 $a_{1n} \to a_1, a_{2n} \to a_2, \cdots, a_{mn} \to a_m$, 且 $a_1, a_2, \cdots, a_m, c_1, c_2, \cdots, c_m$ 为常数, 则

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(c_1a_{1n} + c_2a_{2n} + \cdots + c_ma_{mn})\\ =&c_1a_1 + c_2a_2 + \cdots + c_ma_m\\ =&c_1\lim_{n\to\infty} a_{1n} + c_2\lim_{n\to\infty} a_{2n} + \cdots + c_m\lim_{n\to\infty} a_{mn}\end{aligned}$$

   对 $\forall m \in N^*$ 成立.

12.2 数列极限的"四性"

命题 12.1 (数列极限的"四性")

设 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 满足以下四性:

1. 有界性: 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界, 反之未必;
2. 唯一性: 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则其极限唯一;
3. 保号性: 若 $\{a_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,$a_n \geqslant 0, \forall n \geqslant n_0$, 则必有 $a \geqslant 0$;
4. 保序性: 若 $a_n \to a, b_n \to b$, 且 $a_n \leqslant (\geqslant) b_n, \forall n \geqslant n_0$, 则必有 $a \leqslant (\geqslant) b$.

证明

1. 取 $\varepsilon = 1$, 由定义知道, 当存在一个自然数 N, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < 1$, 即当 $n > N$ 时, 有 $|a_n| < |a| + 1$. 取

$$M = \max(|a| + 1, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|),$$

   注意到, 第一, 有有限个数中一定能取得一个最大的; 第二, 上面确定的 M 显然与 n 无关. 则对所有自然数 n, 也就是说数列的所有项, 都会有 $|a_n| \leq M$.

2. 如果 $\{a_n\}$ 有两个极限值 a 和 b. 根据极限的定义, 对于任意的正数 ε, 注意到 $\frac{\varepsilon}{2}$ 也是一个正数, 因此对应两个极限值, 分别存在正整数 N_1 和 N_2, 使得当

$$n > N_1 \text{ 时有} |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$n > N_2 \text{ 时有} |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此, 当 $n > \max(N_1, N_2)$ 时（即 $n > N_1, n > N_2$）, 上面两个不等式都满足, 所以

$$|a-b| = |(a-a_n)+(a_n-b)| \leq |a-a_n| + |a_n-b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

两个数的距离要小于任意一个正数, 这两个数必须相等, 即 $a = b$.

3. 若 $a > l$, 取 $\varepsilon = a - l > 0$, 则存在一个自然数 N, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - a| < \varepsilon = a - l, \text{因此} -(a-l) < a_n - a$$

即, 当 $n > N$ 时, 不等式 $a_n > l$ 成立. 对于 $a < l$ 的情况, 可类似证明, 在这种情况下, 只要取 $\varepsilon = l - a > 0$ 即可. 对于此问, 取 $l = 0$.

4. 令 $c_n = b_n - a_n$, 则 $c_n \to b - a$, 且 $c_n \leqslant 0, \forall n \geqslant n_0$, 由保号性可知,$b - a \leqslant 0$, 即 $a \leqslant b$.

注 其中唯一性暗示了, 改变数列中有限多项的值, 不会影响数列的收敛性及其极限. 例如, 对于数列 $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$, 它的极限是 0, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. 如果我们改变数列的前 10 项, 如 $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1/11, 1/12, 1/13, 1/14, \ldots$, 则数列的极限仍然是 0. 这个性质在证明数列极限的存在性时, 常常会被用到.

有界性质给出了收敛数列的一个必要条件. 因此无界数列一定是发散的. 例如对于数列 $0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \cdots$ 显然是无界的, 且发散的.

保号性的条件是不严格不等, 若调整为 $a_n > 0$, 则无法说明 $a > 0$. 例如数列 $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ 的极限是 0, 但数列的每一项都是正数.

12.3 收敛数列极限的四则运算法则

定理 12.2 (收敛数列极限的四则运算法则)

设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 则有

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, 其中 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

♡

证明

1. 目的时要证明对于任意的正数 ϵ, 能够找到一个正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, 不等式

$$|a_n \pm b_n - (a \pm b)| \leq \epsilon$$

成立. 由 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的收敛性知, 对于任意 $\dfrac{\epsilon}{2}$, 分别存在正整数 N_1 和 N_2 使得

$$\text{当} n > N_1 \text{ 时有} |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2},$$

以及

$$\text{当} n > N_2 \text{ 时有} |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}.$$

取 $N = \max(N_1, N_2)$, 则当 $n > N$ 时, 上面两个式子同时成立, 因此有

$$|a_n \pm b_n - (a \pm b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

2. 注意到

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| = |a_n||b_n - b| + |b_n - b||a_n - a|.$$

由于 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是收敛数列, 故都是有界的, 取一个大的界 M, 使得

$$|a_n|, |b_n| < M (n \geqslant 1)$$

因此 $|b| \leq M$ (定理 1.4 中的 3°). 对于任意的正数 ϵ, 对应 $\dfrac{\epsilon}{2M}$, 分别存在整数 N_1 和 N_2, 使得当 $n > N$ 时,

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2M}, |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2M}.$$

同时成立. 因此当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n b_n - ab| < M|b_n - b| + M|a_n - a| < M \cdot \frac{\epsilon}{2M} + M \cdot \frac{\epsilon}{2M} = \epsilon.$$

3. 因为

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n},$$

且 $b \neq 0$, 由 2° 可知, 只需证明数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ 收敛于 $\dfrac{1}{b}$ 即可. 假设 $b > 0$, 则

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{|b_n - b|}{|b_n b|}\right|.$$

由于 b_n 收敛于 b, 一方面对于正数 $b/2 > 0$, 存在 N_1, 当 $n > N_1$ 时,

$$|b_n - b| < \frac{b}{2}.$$

另一方面, 对于任意给定的正数 ϵ, 存在 N_2, 使得当 $n > N_2$ 时,

$$|b_n - b| < \frac{b^2 \epsilon}{2}.$$

所以, 当 $n > N = \max(N_1, N_2)$ 时,

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \leq |b_n - b| \cdot \frac{2}{b^2} \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

即

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}.$$

定理**??**说明收敛数列的极限运算和四则运算是可以交换的, 并可推广到有限多个收敛数列与四则运算的情况. 对于 3 中的结论, 会因为某些 b_n 为 0 而使得分式没有意义. 但是因为

$\{b_n\}$ 的极限 $b \neq 0$, 所以 b_n 为 0 的项至多只有有限个. 可以改变这有限多项的值, 这不会改变 $\{b_n\}$ 的收敛性和极限. 或者在 $\{a_nb_n\}$ 中删去这些没有定义的有限多项, 不会改变其收敛性和极限. 有了定理**??**, 在计算复数列极限时, 可以将其化为简极限的四则运算, 而不必再使用 "ε-N" 语言作繁琐的论述.

12.4 例题

例 12.1 设 $a_n = (1+\frac{1}{n})^n, n \in N^*$, 证明:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e} \approx 2.7182818128$;
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e} = \lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x, x \in R$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}, x \in R$

解 函数极限还没有讲到, 此处仅证明第 1 问. 证明数列 a_n 收敛即可. 首先证明该数列是递增的。事实上，由二项式定理可得

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \cdot \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}.$$

$$= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right),$$

$$a_{n+1} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

比较 a_n 和 a_{n+1} 两个表达式的右端和号中的对应项，显然，前者较小。而 a_{n+1} 所多出来的一项 $\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 0$，故 $a_{n+1} > a_n$。所以 $\{a_n\}$ 为严格递增数列。

其次，我们将证明数列是有界的。在 a_n 的上述展开式中，

$$0 < \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < 1.$$

所以

$$2 < a_n < 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

$$< 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} = 3 - \frac{1}{n} < 3,$$

即 $n = 2, 3, \ldots$，也就是说数列 $\{a_n\}$ 是单调递增且有上界的，因此一定收敛。

例 12.2 证明闭区间套定理.

定理 12.3 (闭区间套定理)

若 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}], n = 1, 2, \cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一的实数 ξ, 使得 $\xi \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots$.

所有区间的左端点构成的数列 $\{a_n\}$ 是单调递增有上界的, 故有极限, 记为 a, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 同理, 所有区间的右端点构成的数列 $\{b_n\}$ 是单调递减有下界的, 故有极限, 记为 b, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. 因此 $a-b=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$, 即 $a=b$. 即证存在 $\xi=a=b$.

若存在另一实数 $\eta\in[a_n,b_n], n=1,2,\cdots$, 则 $\xi\leqslant\eta\leqslant\xi$, 即 $\xi=\eta$. 故唯一性得证.

注 闭区间套定理, 是刻画实数集 $\mathbb{R}$ 的连续性的五个等价公理之一.

为了纪念数学家 Euler(欧拉) 在其中的贡献, 将 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 记为 e. 经计算可知,e ≈ 2.718281828. 讲义中还证明了 e 是一个无理数, 且将以 e 为底的对数称为自然对数, 记为 $\ln x$, 即 $\ln x=\log_{\mathrm{e}} x$.

✍ 作业 ex1.2: 14,15(3)(4),16,18(3),22(2)(4);CH1:3(2).